M 皇后问题 - 构造法原理

[原]　E.J.Hoffman;　J.C.Loessi;　R.C.Moore

The Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory（约翰霍普金斯大学应用物理实验室）

[译]　EXP　2017-12-29

1. 前言

文本核心内容主要译自 E. J. Hoffman、J. C. Loessi 和 R. C. Moore 发表于 Mathematics Magazine《数学杂志》上的学术论文《Constructions for the Solution of the m Queens Problem》（已被美国数学协会 Mathematical Association of America 公开），具体期数为 Vol. 42, No. 2 (Mar., 1969), pp. 66-72。

该文献可从以下途径购买：

http://www.jstor.org/stable/2689192

http://links.jstor.org/sici?sici=0025-570X%28196903%2942%3A2%3C66%3ACFTSOT%3E2.0.CO%3B2-9

该文献的英文原文链接：http://penguin.ewu.edu/~trolfe/QueenLasVegas/Hoffman.pdf

该文献的 CSDN 下载地址：http://download.csdn.net/download/lyy289065406/10184847

2. 问题背景

M 皇后问题： 在 M×M 格的国际象棋上摆放 M 个皇后，使其不能互相攻击，即任意两个皇后都不能处于同一行、同一列或同一斜线上。

根据场景，又有三种衍生问题：

① 共有多少种摆法（即有多少种可行解）

② 求出所有可行解

③ 求任意一个可行解

问题① 属于 **禁位排列** 问题，目前是存在通项公式直接求解的。

问题② 属于 **搜索** 问题，在网上也有多种解法，主流是 回溯法（另有衍生的位运算变种算法），但不管如何优化，回溯法都有一个致命的问题：M 值不能过大（一般 M=30 已是极限）。

问题③ 属于 问题② 的子集，因此很多人的切入点依然是回溯法，也有启发式算法的解法：如遗传算法、还有刘汝佳在《算法艺术与信息学竞赛》提出的启发式修补算法。启发式算法在 M<10000 左右都是可解的，但是因为启发式算法均存在随机性，收敛速度视不同的收敛因子而变化（我看过某篇论文称启发式算法在 M=10000 时的耗时等价于回溯法 M=30 的耗时）。

但早在 1969 年， 问题③ 的解就被 E. J. Hoffman、J. C. Loessi 和 R. C. Moore 找到了潜在的数学规律，通过推导出数学公式，利用 **构造法** 使得该问题可在 O(1) 的时间复杂度得到解。

3. 译者的话

① 由于原文使用了“m 皇后”进行描述，所以本文也使用“m 皇后”进行描述。我这里就不调整为大多数人习惯的“n 皇后”了，避免某些数学公式参数混淆。

② 原文写得有点艰涩，有些中间步骤是跳过了。我就加上自己的理解做了意译，并补上了跳过的步骤和图示，但是核心的推导思路和步骤不会修改。

③ 原文首先给出了 3 个构造式（其实就是 m 皇后问题的通解式），然后以此为结论展开了一系列的推导证明这 3 个构造式是正确的。但是这 3 个构造式真正是怎么得来，原作者并没有说，估计是原作者做了大量的演绎、从 m 皇后的特解找到了潜在规则所总结出来的通解。

4. 译文：m 皇后问题的构造解法

4.1 数学模型定义

m 皇后问题最初是由 Gauss（高斯）提出的，该问题描述如下：

是否有可能在一个 m×m 的国际棋盘上放置 m 个皇后使得她们无法互相攻击？（注：皇后是国际象棋中的一种棋子，她可以对横、竖、斜三个方向的棋子发起攻击）

这是一个有趣的问题，我们可以将其约束到一个数学模型进行描述：

把棋盘定义为一个 m×m 的方格矩阵，那么对于任意方格可以使用有序对 (i, j) 以表示其行列坐标，其中 $1 \le i \le m$ 表示该方格的**行编号**，$1 \le j \le m$ 表示该方格的**列编号**。

同时我们再为每个方格定义一组对角编号：

令**自左上到右下方向为主对角线**，对于主对角线上的方格 (i, j)，显然有：

$m - j + i = MAJOR\_CONSTANT$ —— *译者注：这个公式对后续推导起到重要作用*

其中 MAJOR_CONSTANT 称之为主对角常数，显然有 $1 \le$ MAJOR_CONSTANT $\le$ m，将其定义为方格 (i, j) 的**主对角编号**。

进一步地，令**自右上到左下方向**为**次对角线**，对于次对角线上的方格 (i, j)，显然有：

$$i + j - 1 = MINOR\_CONSTANT$$ —— *译者注：这个公式对后续推导起到重要作用*

其中 MINOR_CONSTANT 称之为次对角常数，显然有 $1 \le$ MINOR_CONSTANT $\le m$，将其定义为方格 (i, j) 的**次对角编号**。

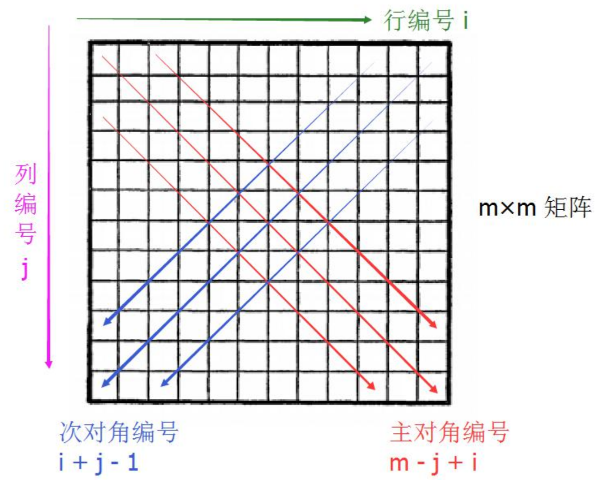

图 1　m 皇后问题的解模型

至此，m 皇后问题的**解模型**可以定义为如下：

放置 m 个皇后到一个 m×m 的方格矩阵，使得皇后们的所在的方格同时满足下面所有条件：

① **行编号唯一**

② **列编号唯一**

③ **主对角编号唯一**

④ **次对角编号唯一**

这个模型足以解决所有 m 皇后问题（但**仅适用于 m>=4** 的情况，因为 m=2、3 时无解，m=1 的解就不需要讨论了）—— *译者注：这个大前提条件会在最后进行论证*

4.2 m 皇后通解：三个构造式

由于通解公式相对复杂，为了便于说明，此处不从过程推导出结论，而是反其道而行之：先给出结论的通解公式（且不考虑公式是怎么推演出来的），再证明之。

m 皇后问题的解的共由 3 个构造式组成。

4.2.1 【构造式 A】

令 **m = 2n**，其中 **n = 2, 3, 4,......**

构造式 A 仅适用于 **m 是偶数**的情况，它由两个子公式组成：

PA-1：放置皇后到方格 (i_k, j_k)，其中：

$$i_k = k\,,\quad j_k = 2k \quad (k = 1,2,3,......,n)$$

PA-2：放置皇后到方格 (i_l, j_l)，其中：

$$i_l = 2n + 1 - l\,,\quad j_l = 2n + 1 - 2l \quad (l = 1,2,3,......,n)$$

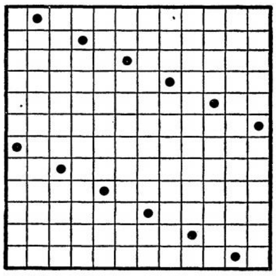

图 2 使用构造式 A 解决 12 皇后问题的解

4.2.2 【构造式 B】

令 **m = 2n**，其中 **n = 2, 3, 4,......**

构造式 B 仅适用于 **m 是偶数**的情况，它同样由两个子公式组成：

PB-1：放置皇后到方格 (i_k, j_k)，其中：

$$i_k = k\,,\quad j_k = 1 + \{[2(k-1) + n - 1] \bmod m\} \quad (k = 1,2,3,......,n)$$

PB-2：放置皇后到方格 (i_l, j_l)，其中：

$$i_l = 2n + 1 - l\,,\quad j_l = 2n - \{[2(l-1) + n - 1] \bmod m\} \quad (l = 1,2,3,......,n)$$

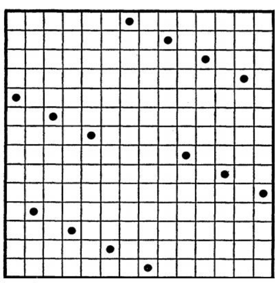

图 3 使用构造式 B 解决 14 皇后问题的解

4.2.3 【构造式 C】

构造式 C 是构造式 A 或 B 的扩展推导式，仅适用于 **m+1 是奇数**的情况：

当已使用构造式 A 或 B 求得一个 m×m 的皇后问题的解时，若同时增加第 m+1 行和第 m+1 列，那么第 m+1 个皇后应放置在坐标为 $(m+1, m+1)$ 的方格。

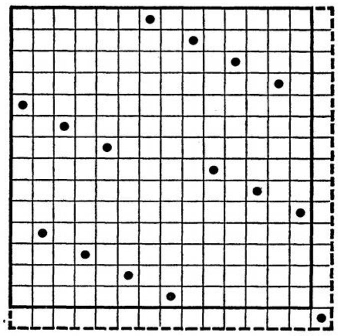

图 4 构造式 C 解集图示（在前面构造式 B 的示例解集基础上增加一行一列）

4.3 三个构造式的正确性证明

要证明构造式是成立的，只需要证明每个构造式导出的皇后位置均满足：**① 行编号唯一；② 列编号唯一；③ 主对角编号唯一；④ 次对角编号唯一**

4.3.1 【构造式 A】的证明

4.3.1.1 【构造式 A】

令 **m = 2n**，其中 **n = 2, 3, 4,......（即 m≥4 且是偶数）**

PA-1：放置皇后到方格 (i_k, j_k)，其中：

$$i_k = k\text{，}\quad j_k = 2k \quad （k = 1,2,3,......,n）$$

PA-2：放置皇后到方格 (i_l, j_l)，其中：

$$i_l = 2n + 1 - l\text{，}\quad j_l = 2n + 1 - 2l \quad （l = 1,2,3,......,n）$$

构造式含义：若把棋盘在横中轴线切开，很明显解集是呈中心旋转对称的，其中上半部分对应 PA-1 的解集，下半部分对应 PA-2 的解集：

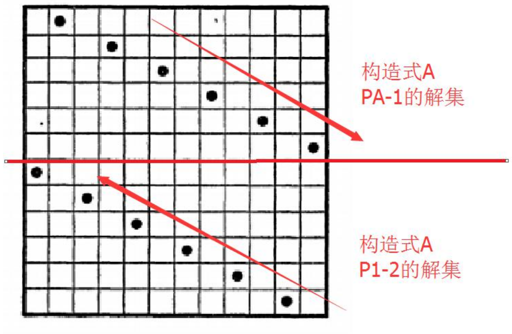

图 5 构造式 A 解集图示

4.3.1.2 【定理 A】

对于 m 皇后问题，当 $n \neq 3\lambda + 1$（其中 $\lambda = 0,1,2,......$）时，

则必定可以使用【构造式 A】求解。

4.3.1.3 【定理 A】的证明

① 行列编号的唯一性证明：

根据 PA-1 导出的皇后位置为 $(k, 2k)$，其中 $1 \leq k \leq n$

根据 PA-2 导出的皇后位置为 $(2n+1-l, 2n+1-2l)$，其中 $1 \leq l \leq n$

明显地，PA-1 的每个皇后放置在前 n 行的每个奇数列，PA-2 的每个皇后放置在后 n 行的每个偶数列，亦即每行每列均有且只有一个皇后，**行列编号的唯一性得证**。

② 主对角编号的唯一性证明：

把 PA-1 的 i_k、j_k 代入主对角公式 $m - j + i$：

$$m - j + i = 2n - 2k + k = 2n - k \text{，其中} 1 \leq k \leq n$$

把 PA-2 的 i_l、j_l 代入主对角公式 $m - j + i$：

$$m - j + i = 2n - (2n+1-2l) + (2n+1-l) = 2n + l \text{，其中} 1 \leq l \leq n$$

假设 PA-1 与 PA-2 的主对角编号存在冲突，则有：

$$2n - k = 2n + l \quad \Rightarrow \quad -k = l$$

受 k、l 的取值范围影响，显然是不可能的，**主对角编号的唯一性得证**。

③ **次对角编号的唯一性证明：**

把 PA-1 的i_k、j_k代入次对角公式$i+j-1$：

$$i+j-1 \Rightarrow k+2k-1 \Rightarrow 3k-1，其中 1 \le k \le n$$

把 PA-2 的i_l、j_l代入次对角公式$i+j-1$：

$$i+j-1 \Rightarrow (2n+1-l)+(2n+1-2l)-1 \Rightarrow 4n-3l+1，其中 1 \le l \le n$$

假设 PA-1 与 PA-2 的次对角编号存在冲突，则有：

$$3k-1=4n-3l+1 \quad \Rightarrow \quad 2n=3(\frac{k+l}{2})-1$$

由于$2n$是偶数，则$\frac{k+l}{2}$必定是奇数，即$\frac{k+l}{2}=2\lambda+1$，其中$\lambda=0,1,2,......$

代入替换有$2n=3(2\lambda+1)-1=6\lambda+2 \quad \Rightarrow \quad n=3\lambda+1$ ，其中$\lambda=0,1,2,......$

由此可知当$n \ne 3\lambda+1$ （$\lambda=0,1,2,......$）时，**次对角编号是唯一的**。

综上①②③，定理 A 得证。

4.3.2 【构造式 B】的证明

4.3.2.1 【构造式 B】

令 m = 2n，其中 n = 2, 3, 4,......（即 m≥4 且是偶数）

PB-1：放置皇后到方格(i_k, j_k)，其中：

$$i_k=k，\quad j_k=1+\{[2(k-1)+n-1] \bmod m\} \quad （k=1,2,3,......,n）$$

PB-2：放置皇后到方格(i_l, j_l)，其中：

$$i_l=2n+1-l，\quad j_l=2n-\{[2(l-1)+n-1] \bmod m\} \quad （l=1,2,3,......,n）$$

为了便于说明，**对 PB-1 和 PB-2 的对 m 取 mod 运算做一下等价处理：**

以 PB-1 为例，先计算模边界值，令 $2(k-1)+n-1=m$ （注： $m=2n$）

$$\Rightarrow \quad k=\frac{n+3}{2}$$

那么原式的取模运算可变形为分段函数：

$$j_k=\begin{cases}1+[2(k-1)+n-1], & (k<\dfrac{n+3}{2})\\ 1+\{[2(k-1)+n-1]-m\}, & (k\ge\dfrac{n+3}{2})\end{cases}$$

PB-1：化简后为：

$$i_k=k \qquad (k=1,2,3,......,n)$$

$$j_k=\begin{cases}2k+n-2, & (1\le k<\dfrac{n+3}{2})......(1)\\ 2k-n-2, & (\dfrac{n+3}{2}\le k\le n)......(2)\end{cases}$$

PB-2：同理可等价于：

$$i_l=2n+1-l \qquad (l=1,2,3,......,n)$$

$$j_l=\begin{cases}n-2l+3, & (1\le l<\dfrac{n+3}{2})........(1)\\ 3n-2l+3, & (\dfrac{n+3}{2}\le l\le n)......(2)\end{cases}$$

构造式含义：若把棋盘在横中轴线切开，很明显解集是呈中心旋转对称的，其中上半部分对应 PB-1 的解集，下半部分对应 PB-2 的解集。同时根据列编号 mod m 部分的取值（≥m 或＜m），PB-1 与 PB-2 的解集又分别拆分成两个分段函数子集：

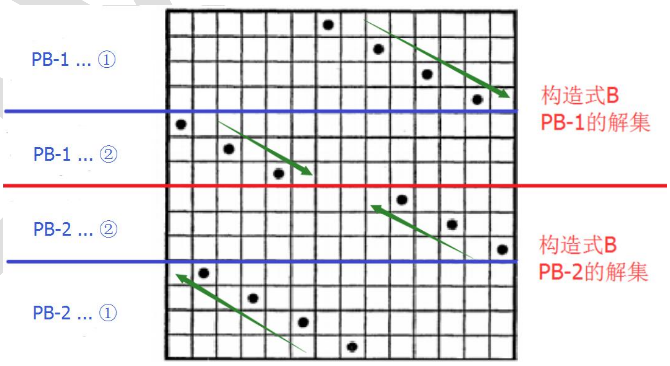

图 6 构造式 B 解集图示

4.3.2.2 【定理 B】

对于 m 皇后问题，当 $n\ne 3\lambda$（其中 $\lambda=1,2,3,......$）时，

则必定可以使用【构造式 B】求解。

4.3.2.3 【定理 B】的证明

① 行列编号的唯一性证明：

注意 PB-1 与 PB-2 都是分段函数。

根据 PB-1 导出的皇后位置 (i_k, j_k) **是递增的，**

依次放置皇后在 PB-1-(1)的 $(1,n)$ 、$(2,n+2)$ 、$(3,n+4)$ 、......、(r,s)

其中把 $MAX(k)$ 代入 i_k 有：$MAX(i_k)=r=\begin{cases}\dfrac{n+2}{2}，\text{n是偶数}\\ \dfrac{n+1}{2}，\text{n是奇数}\end{cases}$ （$1\le k<\dfrac{n+3}{2}$）

再把 $MAX(k)$ 代入 j_k 有：$MAX(j_k)=s=\begin{cases}2n，\text{n是偶数}\\ 2n-1，\text{n是奇数}\end{cases}$ （$1\le k<\dfrac{n+3}{2}$）

和依次放置皇后在 PB-1-(2)的 (r',s') 、$(r'+1,s'+2)$ 、......、$(n,n-2)$

其中把 $MIN(k)$ 代入 i_k 有：$MIN(i_k)=r'=\begin{cases}\dfrac{n+4}{2}，\text{n是偶数}\\ \dfrac{n+3}{2}，\text{n是奇数}\end{cases}$ （$\dfrac{n+3}{2}\le k\le n$）

$$\Rightarrow r'=r+1$$

再把 $MIN(k)$ 代入 j_k 有：$MIN(j_k)=s'=\begin{cases}2，\text{n是偶数}\\ 1，\text{n是奇数}\end{cases}$ （$\dfrac{n+3}{2}\le k\le n$）

根据 PB-2 导出的皇后位置 (i_l, j_l) **是递减的，**

依次放置皇后在 PB-2-(1)的 $(2n,n+1)$、$(2n-1,n-1)$、$(2n-2,n-3)$、......、(p,q)

其中把 $MAX(l)$ 代入 i_l 有：$MIN(i_l)=p=\begin{cases}\dfrac{3n}{2}，\text{n是偶数}\\ \dfrac{3n+1}{2}，\text{n是奇数}\end{cases}$ （$1\le l<\dfrac{n+3}{2}$）

再把 $MAX(l)$ 代入 j_l 有：$MIN(i_l)=q=\begin{cases}1，\text{n是偶数}\\ 2，\text{n是奇数}\end{cases}$ （$1\le l<\dfrac{n+3}{2}$）

和依次放置皇后在 PB-2-(2)的 (p',q')、$(p'-1,q'-2)$ 、$(p'-2,q'-4)$ 、......、$(n+1,n+3)$

其中把 $MIN(l)$ 代入 i_l 有：$$MAX(i_l)=p'=\begin{cases}\dfrac{3n-2}{2}，\text{n是偶数}\\ \dfrac{3n-1}{2}，\text{n是奇数}\end{cases}\quad（\frac{n+3}{2}\le l\le n）$$

$$\Rightarrow p'=p-1$$

再把 $MIN(l)$ 代入 j_l 有：$$MAX(j_l)=q'=\begin{cases}2n-1，\text{n是偶数}\\ 2n，\text{n是奇数}\end{cases}\quad（\frac{n+3}{2}\le l\le n）$$

明显地：当 n 是偶数时，PB-1 的每个皇后放置在前 n 行的每个偶数列，PA-2 的每个皇后放置在后 n 行的每个奇数列；当 n 是奇数时，PB-1 的每个皇后放置在前 n 行的每个奇数列，PA-2 的每个皇后放置在后 n 行的每个偶数列。亦即不论 n 的奇偶性如何，每行每列均有且只有一个皇后，**行列编号的唯一性得证**。

② 主对角编号的唯一性证明：

把 PB-1 的 i_k、j_k 代入主对角公式 $m-j+i$：

$$m-j+i\Rightarrow\begin{cases}2n-(2k+n-2)+k\Rightarrow n-k+2，\quad(1\le k<\dfrac{n+3}{2})\\ 2n-(2k-n-2)+k\Rightarrow 3n-k+2，\quad(\dfrac{n+3}{2}\le k\le n)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n-k+2，\quad(1\le k<\dfrac{n+3}{2})\\ 3n-k'+2，\quad(\dfrac{n+3}{2}\le k'\le n)\text{......此处替换变量以便下文区分}\end{cases}$$

把 PB-2 的 i_l、j_l 代入主对角公式 $m-j+i$：

$$m-j+i\Rightarrow\begin{cases}2n-(n-2l+3)+(2n+1-l)\Rightarrow 3n+l-2，\quad(1\le l<\dfrac{n+3}{2})\\ 2n-(3n-2l+3)+(2n+1-l)\Rightarrow n+l-2，\quad(\dfrac{n+3}{2}\le l\le n)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3n+l-2，\quad(1\le l<\dfrac{n+3}{2})\\ n+l'-2，\quad(\dfrac{n+3}{2}\le l'\le n)\text{......此处替换变量以便下文区分}\end{cases}$$

假设主对角编号不是唯一的，那么以下六个等式必至少有一成立：

$$\begin{cases} n-k+2=3n+l-2.........(1) \\ n-k+2=n+l'-2...........(2) \\ 3n-k'+2=3n+l-2........(3) \\ 3n-k'+2=n+l'-2..........(4) \\ n-k+2=3n-k'+2.........(5) \\ 3n+l-2=n+l'-2..........(6) \end{cases}$$

其中： $1\le k,l<\dfrac{n+3}{2}$ ， $\dfrac{n+3}{2}\le k',l'\le n$

化简（1）得 $k+l=4n-2$，但因为 $\min(k+l)=2$，此时 $n=1$，与前提条件 $m=2n\ge 4\Rightarrow n\ge 2$ 矛盾，因此（1）不成立。

化简（4）得 $k'+l'=2n+4$，与 $\max(k'+l')=2n$ 矛盾，因此（4）不成立。

化简（5）得 $k+k'=2n$ 从取值范围看显然不成立。

化简（6）得 $l'-l=2n$ 从取值范围看显然不成立。

化简（2）得 $k+l'=4$，化简（3）得 $k'+l=4$，

由于 k 与 l 的取值范围相同， k' 与 l' 的取值范围相同，因此有：

$$MIN(k+l')=MIN(l+k')=\begin{cases} 1+\dfrac{n+4}{2} \\ 1+\dfrac{n+3}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{n+6}{2}，n\text{是偶数} \\ \dfrac{n+5}{2}，n\text{是奇数} \end{cases}$$

$$MAX(k+l')=MAX(l+k')=\begin{cases} \dfrac{n+2}{2}+n \\ \dfrac{n+1}{2}+n \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{3n+2}{2}，n\text{是偶数} \\ \dfrac{3n+1}{2}，n\text{是奇数} \end{cases}$$

分别令 $\dfrac{n+6}{2}=4$、$\dfrac{n+5}{2}=4$、$\dfrac{3n+2}{2}=4$、$\dfrac{3n+1}{2}=4$，

显然当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，（2）或（3）是有可能成立的。

但从取值范围 $\dfrac{n+3}{2}\le k',l'\le n \;\Rightarrow\; \dfrac{n+3}{2}\le n \;\Rightarrow\; n\ge 3$

而 $n=3$ 不在定理 B 的前提条件 $n\ne 3\lambda$（$\lambda=1,2,3,......$）范围内，可以直接排除。

因此 $n>3$（否则 k' 与 l' 不能存在），所以不存在 $n=2$ 或 $n=3$ 取值的可能性，亦即（2）（3）实际均不成立。

综上，（1）（2）（3）（4）（5）（6）均不成立，**主对角编号的唯一性得证**。

③ 次对角编号的唯一性证明：

把 PB-1 的 i_k、j_k 代入次对角公式 $i+j-1$：

$$i+j-1\Rightarrow\begin{cases}k+(2k+n-2)-1\Rightarrow 3k+n-3, & (1\le k<\frac{n+3}{2})\\ k+(2k-n-2)-1\Rightarrow 3k-n-3, & (\frac{n+3}{2}\le k\le n)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3k+n-3, & (1\le k<\frac{n+3}{2})\\ 3k'-n-3, & (\frac{n+3}{2}\le k'\le n)\text{......此处替换变量以便下文区分}\end{cases}$$

把 PB-2 的 i_l、j_l 代入次对角公式 $i+j-1$：

$$i+j-1\Rightarrow\begin{cases}(2n+1-l)+(n-2l+3)-1\Rightarrow 3n-3l+3, & (1\le l<\frac{n+3}{2})\\ (2n+1-l)+(3n-2l+3)-1\Rightarrow 5n-3l+3, & (\frac{n+3}{2}\le l\le n)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3n-3l+3, & (1\le l<\frac{n+3}{2})\\ 5n-3l'+3, & (\frac{n+3}{2}\le l'\le n)\text{......此处替换变量以便下文区分}\end{cases}$$

假设次对角编号不是唯一的，那么以下六个等式必至少有一成立：

$$\begin{cases}3k+n-3=3n-3l+3\text{..........(1)}\\ 3k+n-3=5n-3l'+3\text{..........(2)}\\ 3k'-n-3=3n-3l+3\text{..........(3)}\\ 3k'-n-3=5n-3l'+3\text{..........(4)}\\ 3k+n-3=3k'-n-3\text{...........(5)}\\ 3n-3l+3=5n-3l'+3\text{.........(6)}\end{cases}\quad \text{其中：}\quad 1\le k,l<\frac{n+3}{2}\quad,\quad \frac{n+3}{2}\le k',l'\le n$$

化简（1）得 $2n=3(k+l-2)$，因此 $k+l-2$ 必为偶数，令 $2\lambda=k+l-2$（$\lambda=1,2,3,......$），则有 $2n=3(2\lambda)\Rightarrow n=3\lambda$，即当且仅当 $n=3\lambda$ 时（1）成立。

化简（2）得 $4n=3(k+l'-2)$，因此 $k+l'-2$ 必为二重偶数（即至少能被 2 整除两次），令 $4\lambda=k+l'-2$（$\lambda=1,2,3,......$），则有 $4n=3(4\lambda)\Rightarrow n=3\lambda$，即当且仅当 $n=3\lambda$ 时（2）成立。

化简（3）得 $4n=3(k'+l-2)$，因此 $k'+l-2$ 必为二重偶数（即至少能被 2 整除两次），令 $4\lambda=k'+l-2$（$\lambda=1,2,3,......$），则有 $4n=3(4\lambda)\Rightarrow n=3\lambda$，即当且仅当 $n=3\lambda$ 时（3）成立。

化简（4）得 $2n=k'+l'-2$，但从 k' 与 l' 的取值范围可知 $MAX(k'+l'-2)=n+n-2=2n-2$，亦即 $2n>k'+l'-2$，因此（4）不成立。

化简（5）得 $2n=3(k'-k)$，因此 $k'-k$ 必为偶数，令 $2\lambda=k'-k$（$\lambda=1,2,3,......$），则有 $2n=3(2\lambda)\Rightarrow n=3\lambda$，即当且仅当 $n=3\lambda$ 时（5）成立。

化简（6）得 $2n=3(l'-l)$，因此 $l'-l$ 必为偶数，令 $2\lambda=l'-l$（$\lambda=1,2,3,......$），则有 $2n=3(2\lambda)\Rightarrow n=3\lambda$，即当且仅当 $n=3\lambda$ 时（6）成立。

由此可知，当 $n\neq3\lambda$ 时（$\lambda=1,2,3,......$），（1）（2）（3）（4）（5）（6）均不成立，**次对角编号的唯一性得证**。

综上①②③，定理 B 得证。

4.3.3 【构造式 C】的证明

4.3.3.1 两条【引理】

我们定义棋盘上由方格 $(1,1)$、$(2,2)$、$(3,3)$、......、(m,m) 连线所得的对角线为**标准对角线**，亦即标准对角线的行列编号必有 $i==j$。

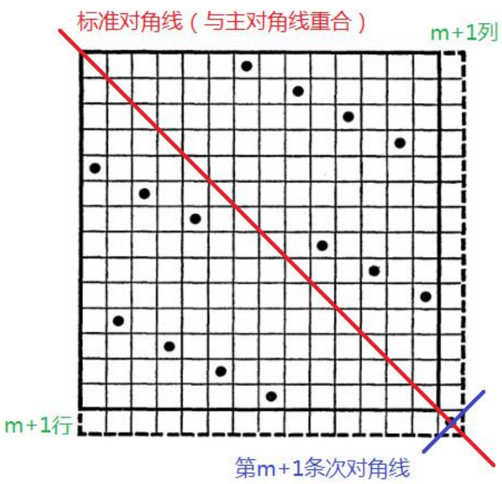

图 7 构造式 C 解集图示

在证明构造式 C 之前，首先需要证明两条引理：

【引理 A】 使用构造式 A 得到的解，没有任何皇后的坐标是在标准对角线上的。

【引理 B】 使用构造式 B 得到的解，没有任何皇后的坐标是在标准对角线上的。

① 【引理 A】的证明：

假设存在皇后位于标准对角线上，则必定满足 $i_k = j_k$ 或 $i_l = j_l$，代入 PA-1 与 PA-2 有：

$$\begin{cases} i_k = j_k \\ i_l = j_l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2k \\ 2n+1-l = 2n+1-2l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ l = 0 \end{cases}$$

$k = 0$ 与取值范围 $k = 1,2,3,\ldots\ldots,n$ 矛盾， $l = 0$ 与取值范围 $l = 1,2,3,\ldots\ldots,n$ 矛盾，

因此假设不成立，**【引理 A】得证**。

② 【引理 B】的证明：

假设存在皇后位于标准对角线上，则必定满足 $i_k = j_k$ 或 $i_l = j_l$，代入 PB-1 与 PB-2 有：

$$\begin{cases} i_k = j_k \Rightarrow \begin{cases} k = 2k+n-2 \\ k = 2k-n-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2-n, & (1 \le k < \frac{n+3}{2}) \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ k = 2+n, & (\frac{n+3}{2} \le k \le n) \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases} \\ i_l = j_l \Rightarrow \begin{cases} 2n+1-l = n-2l+3 \\ 2n+1-l = 3n-2l+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = 2-n, & (1 \le l < \frac{n+3}{2}) \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \\ l = 2+n, & (\frac{n+3}{2} \le l \le n) \ldots\ldots\ldots\ldots(4) \end{cases} \end{cases}$$

由于 $2n = m \ge 4 \Rightarrow n \ge 2$，因此（1）（3）不成立，否则 $k,l \le 0$，与取值范围矛盾。

又由于（2）（4）的取值范围 $k,l \le \mathrm{n}$，（2）（4）明显不成立。

因此假设不成立，**【引理 B】得证**。

4.3.3.2 【定理 C】

对于可使用【构造式 A】或【构造式 B】求解的 m 皇后问题，若同时增加第 m+1 行和第 m+1 列，使其延展为 m+1 皇后问题，那么这个 m+1 皇后问题也是可解的，且第 m+1 个皇后应放置在坐标为 $(m+1,m+1)$ 的方格。

4.3.3.3 【定理 C】的证明

① 行列编号的唯一性证明：

由于【定理 C】是从【定理 A】或【定理 B】上扩展的，且【定理 A】与【定理 B】的所有皇后的行列编号唯一性已得到证明，而【定理 C】的第 m+1 行与第 m+1 列是新增的，那么第 m+1 个皇后的行列编号也必定是唯一的，因此所有皇后的行列编号必定也是唯一的。

② 主对角编号的唯一性证明：

由于第 m+1 个皇后的主对角线与标准对角线是重合的，而通过【引理 A】与【引理 B】可知在 m×m 范围内的标准对角线上不存在任何皇后，换言之标准对角线上只有第 m+1 个皇后，所以主对角线编号是唯一的。

③ 次对角编号的唯一性证明：

对于第 m+1 条次对角线，上面只有 $(m+1,m+1)$ 一个方格，显然次对角线编号是唯一的。

4.4 大前提条件 m≥4 的证明

上述所有的证明，都是基于一开始给出的大前提条件：

对于构造式 A 或 B：令 m = 2n，其中 n = 2, 3, 4,......（即 m≥4 且 m 是偶数）

对于构造式 C：在构造式 A 或 B 可解的基础上令 m+1（即 m≥5 且 m 是奇数）

亦即 m 皇后问题（m≥4 且 m 是偶数）可通过【构造式 A】或【构造式 B】求解，而 m+1 皇后问题（m+1≥5 且 m 是奇数）则可通过【构造式 C】求解。

至于为什么 m=1、m=2 或 m=3 时并不适用于构造式 A、B、C 就是这里要讨论的。

首先当 m=1 时，虽然是有明确的唯一解，但并不存在 m=2n 的形式。而 n 作为三个构造式的重要变量，既然一开始就不存在 n 值，构造式 A、B、C 也就无从谈起了。

那么需要证明的，就是为什么 m=2 与 m=3 也不可取？

证明：

通过定理的描述我们知道，

【定理 A】是存在一个约束条件的：$n \neq 3\lambda_A + 1$（$\lambda_A = 0,1,2,......$）……………（1）

同样【定理 B】也是存在一个约束条件的： $n \neq 3\lambda_B$（$\lambda_B = 1,2,3,......$）………（2）

由于 m=2n，因此（1）（2）等价于：

$$\begin{cases} m \neq 6\lambda_A - 4, & (\lambda_A = 1,2,3,......) \\ m \neq 6\lambda_B, & (\lambda_B = 1,2,3,......) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 2,8,14,...... \\ m \neq 6,12,18,...... \end{cases} （m\text{是偶数}）$$

不难发现，**（2）中 m=2 是在 m<4 范围内没有被约束条件限制的特例**。

但当 m=2 时 n=1，不妨把 n=1 代入 PB-1 与 PB-2，取值范围均矛盾，无法计算列坐标编号。

因此对于【定理 A】与【定理 B】而言，m=2 都是不可解的，从而导致 m=3 也不可用【定理 C】求解。

证毕（事实上，通过画图可以明显发现 m=2、m=3 是无解的）。

5. 译者后记：通解转换式（编程用）

在原作者提出的三个构造式 A、B、C 中，均使用 (i, j) 的**二维坐标形式**标记每个皇后的位置，从数学角度上更易于表达作者的思想，但是不便于编程使用。

为此译者在这里补充针对构造式 A、B、C 的转换公式，使用**一维坐标形式**标记每个皇后位置，以配合编程使用（其实这就是目前网上普遍流传的 m 皇后问题构造式）。

一维坐标的标记方式为：从第 1 行开始，依次写出 m 个数字，分别代表每行的皇后列坐标。亦即行坐标为数序（索引/下标），列坐标为数值。

如序列 [5, 3, 1, 6, 8, 2, 4, 7] 等价于 (1,5), (2,3), (3,1), (4,6), (5,8), (6,2), (7,4), (8,7)

5.1 【构造式 A】的转换式

约束条件：$n \neq 3\lambda + 1$（其中 $\lambda = 0,1,2,......$）

即：$m \neq 2(3\lambda+1) = 6\lambda + 2 \quad \Rightarrow \quad m \bmod 6 \neq 2$ （m 为偶数）

且：$m - 1 \neq 6\lambda + 2 \quad \Rightarrow \quad m \bmod 6 \neq 3$ （m 为奇数，此时适用于构造式 C）

当 m 为偶数时：

把行编号 1~n 代入 PA-1，可得到第 1~n 行的解序列：$[2,4,6,8,...,m]$

把行编号 n+1~2n 代入 PA-2，可得到第 n+1~m 行的解序列： $[1,3,5,7,...,m-1]$

合并两个解序列，就是构造式 A 的通解转换式（A1）：

$[2,4,6,8,...,m],[1,3,5,7,...,m-1]$ .... **（A1）**

当 m 为奇数时：

把行编号 1~m-1 代入（A1），可得到第 1~m-1 行的解序列：

$$[2,4,6,8,...,m-1],[1,3,5,7,...,m-2]$$

然后直接套用构造式 C（增加第 m 行第 m 列），则可得到通解转换式（A2）：

$$[2,4,6,8,...,m-1],[1,3,5,7,...,m-2],[m] \quad \text{......（A2）}$$

5.2 【构造式 B】的转换式

约束条件：不满足构造式 A 约束条件的，都可使用构造式 B 求解。

即：$m \bmod 6 = 2$ （m 为偶数）

或：$m \bmod 6 = 3$ （m 为奇数，此时适用于构造式 C）

当 m 为偶数时：

若 n 为偶数：

把行编号 1~n 代入 PB-1，可得到第 1~n 行的解序列（注：PB-1 是分段函数）：

$$[n,n+2,...,m],[2,4,6,...,n-2]$$

把行编号 n+1~2n 代入 PB-2，可得到第 n+1~m 行的解序列（注：PB-2 是分段函数）：

$$[n+3,n+5,...,m-1],[1,3,5,...,n+1]$$

合并两个解序列，就是构造式 B 的通解转换式（B1）：

$$[n,n+2,...,m],[2,4,6,...,n-2],[n+3,n+5,...,m-1],[1,3,5,...,n+1] \quad \text{......（B1）}$$

若 n 为奇数：

把行编号 1~n 代入 PB-1，可得到第 1~n 行的解序列（注：PB-1 是分段函数）：

$$[n,n+2,...,m-1],[1,3,5,...,n-2]$$

把行编号 n+1~2n 代入 PB-2，可得到第 n+1~m 行的解序列（注：PB-2 是分段函数）：

$$[n+3,n+5,...,m],[2,4,6,...,n+1]$$

合并两个解序列，就是构造式 B 的通解转换式（B2）：

$$[n,n+2,...,m-1],[1,3,5,...,n-2],[n+3,n+5,...,m],[2,4,6,...,n+1] \quad \text{......（B2）}$$

当 m 为奇数时, n=(m-1)/2：

若 n 为偶数：

把行编号 1~m-1 代入（B1），可得到第 1~m-1 行的解序列：

$$[n, n+2, ..., m-1], [2,4,6, ..., n-2], [n+3, n+5, ..., m-2], [1,3,5, ..., n+1]$$

然后直接套用构造式 C（增加第 m 行第 m 列），则可得到通解转换式（B3）：

$$[n, n+2, ..., m-1], [2,4,6, ..., n-2], [n+3, n+5, ..., m-2], [1,3,5, ..., n+1], [m] \text{......} \textbf{（B3）}$$

若 n 为奇数：

把行编号 1~m-1 代入（B2），可得到第 1~m-1 行的解序列：

$$[n, n+2, ..., m-2], [1,3,5, ..., n-2], [n+3, n+5, ..., m-1], [2,4,6, ..., n+1]$$

然后直接套用构造式 C（增加第 m 行第 m 列），则可得到通解转换式（B4）：

$$[n, n+2, ..., m-2], [1,3,5, ..., n-2], [n+3, n+5, ..., m-1], [2,4,6, ..., n+1], [m] \text{......} \textbf{（B4）}$$

5.3 小结：通解转换式归整

对于 m≥4 的 m 皇后问题：

若 $m \bmod 6 \neq 2$ 且 $m \bmod 6 \neq 3$，则可通过（A1）或（A2）导出解序列。

若 $m \bmod 6 = 2$ 或 $m \bmod 6 = 3$，则可通过（B1）或（B2）或（B3）或（B4）导出解序列。

其中当 m 是偶数时，$n = \dfrac{m}{2}$；当 m 是奇数时，$n = \dfrac{m-1}{2}$

$$\begin{cases} (A1\text{-m偶}): [2,4,6,8, ..., m], [1,3,5,7, ..., m-1] \\ (A2\text{-m奇}): [2,4,6,8, ..., m-1], [1,3,5,7, ..., m-2], [m] \\ (B1\text{-m偶n偶}): [n, n+2, ..., m], [2,4,6, ..., n-2], [n+3, n+5, ..., m-1], [1,3,5, ..., n+1] \\ (B2\text{-m偶n奇}): [n, n+2, ..., m-1], [1,3,5, ..., n-2], [n+3, n+5, ..., m], [2,4,6, ..., n+1] \\ (B3\text{-m奇n偶}): [n, n+2, ..., m-1], [2,4,6, ..., n-2], [n+3, n+5, ..., m-2], [1,3,5, ..., n+1], [m] \\ (B4\text{-m奇n奇}): [n, n+2, ..., m-2], [1,3,5, ..., n-2], [n+3, n+5, ..., m-1], [2,4,6, ..., n+1], [m] \end{cases}$$